Cours d'électronique :
Lignes pour la transmission des données

A. Arciniegas

IUT Cergy-Pontoise, Dep GEII, site de Neuville

Contents

Avant propos

Avant propos

Les lignes de transmission sont utilisées pour les télécommunications terrestres. Elles peuvent être des :

Avant propos

Les lignes de transmission sont utilisées pour les télécommunications terrestres. Elles peuvent être des :

- lignes bifilaires (liaisons télégraphiques et téléphoniques) ;

Avant propos

Les lignes de transmission sont utilisées pour les télécommunications terrestres. Elles peuvent être des :

- lignes bifilaires (liaisons télégraphiques et téléphoniques) ;
- lignes coaxiales (communications téléphoniques) ;

Avant propos

Les lignes de transmission sont utilisées pour les télécommunications terrestres. Elles peuvent être des :

- lignes bifilaires (liaisons télégraphiques et téléphoniques) ;
- lignes coaxiales (communications téléphoniques) ;
- fibres optiques (communications téléphoniques) ;

Avant propos

Les lignes de transmission sont utilisées pour les télécommunications terrestres. Elles peuvent être des :

- lignes bifilaires (liaisons télégraphiques et téléphoniques) ;
- lignes coaxiales (communications téléphoniques) ;
- fibres optiques (communications téléphoniques) ;
- lignes microruban (circuits actifs micro-ondes).

Avant propos

Les lignes de transmission sont utilisées pour les télécommunications terrestres. Elles peuvent être des :

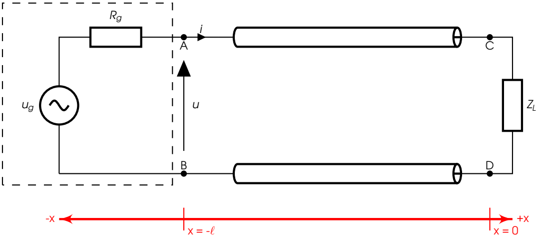
- lignes bifilaires (liaisons télégraphiques et téléphoniques) ;
- lignes coaxiales (communications téléphoniques) ;
- fibres optiques (communications téléphoniques) ;
- lignes microruban (circuits actifs micro-ondes).

Dans le cas des câbles, on peut les classer selon leur utilisation en télécommunications :

- téléphonique à ligne bifilaire ;
- téléphonique à ligne coaxiale ;
- téléphonique à fibre optique ;
- sous-marin.

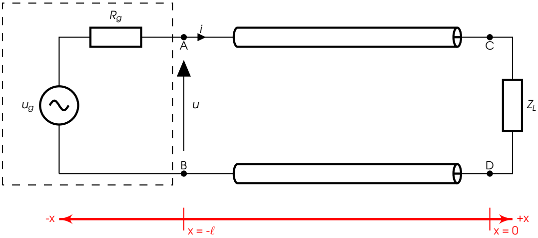
Propagation en haute fréquence

Modélisation de la ligne



Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

Modélisation de la ligne

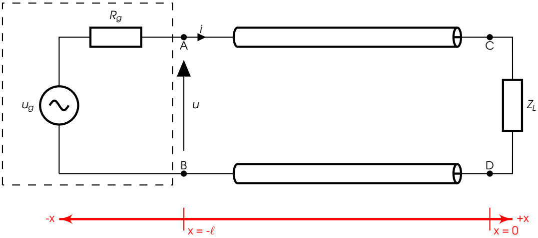


Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

Condition de propagation

$$\ell \ggg \lambda$$

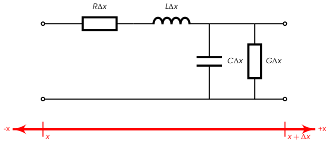
Modélisation de la ligne



Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

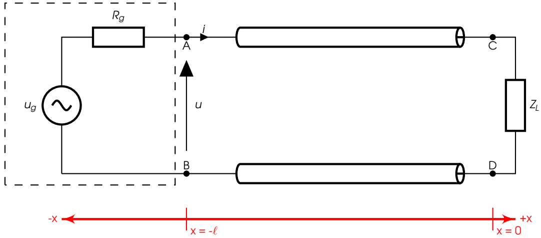
Condition de propagation

$$\ell \ggg \lambda$$



Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

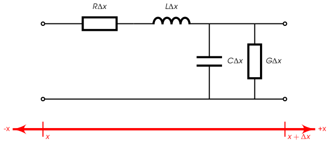
Modélisation de la ligne



Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

Condition de propagation

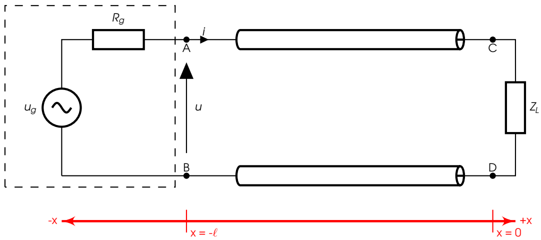
$$\ell \ggg \lambda$$



Avec :

- R : résistance linéique (Ω / m) ;

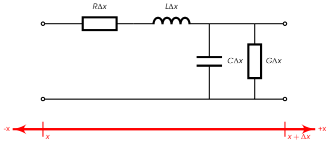
Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.



Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

Condition de propagation

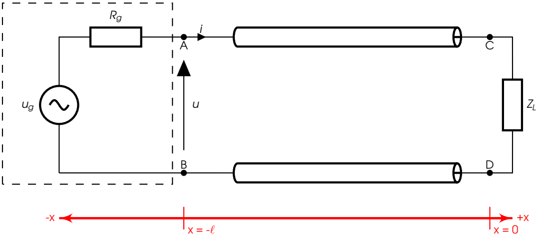
$$\ell \ggg \lambda$$



Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Avec :

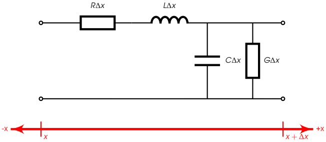
- R : résistance linéique (Ω / m) ;
- L : inductance linéique (H / m) ;



Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

Condition de propagation

$$\ell \ggg \lambda$$

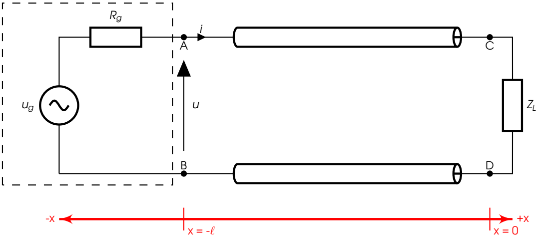


Avec :

- R : résistance linéique (Ω / m) ;
- L : inductance linéique (H / m) ;
- C : capacité linéique (F / m) ;

Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

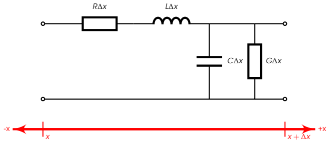
Modélisation de la ligne



Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

Condition de propagation

$$\ell \ggg \lambda$$

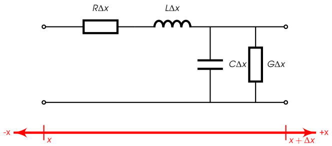


Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Avec :

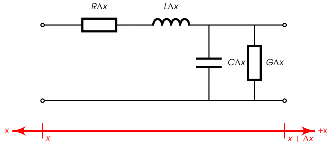
- R : résistance linéique (Ω / m) ;
- L : inductance linéique (H / m) ;
- C : capacité linéique (F / m) ;
- G : conductance linéique (S / m) ;

Équations de propagation



Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Équations de propagation

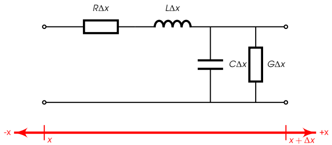


Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Lois de comportement

- tension aux bornes de l'inductance : $u_L = L\Delta x \frac{\partial i_L}{\partial t}$
- courant traversant le condensateur : $i_C = C\Delta x \frac{\partial u_C}{\partial t}$

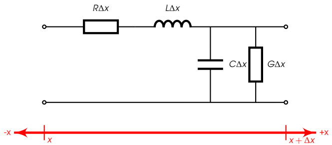
Équations de propagation



Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Mise en équation : Loi des mailles

$$u(x, t) = u_R + u_L + u_C$$

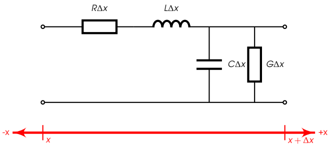


Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Mise en équation : Loi des mailles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right)$$

Équations de propagation



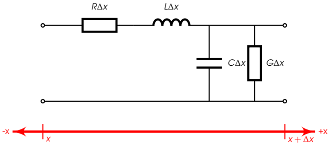
Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Mise en équation : Loi des mailles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right)$$

Mise en équation : Loi des noeuds

$$i(x,t) = i_C + i_G + i(x+\Delta x, t)$$



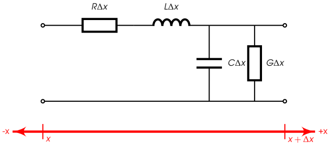
Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Mise en équation : Loi des mailles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right)$$

Mise en équation : Loi des noeuds

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\left(C\frac{\partial u}{\partial t} + Gu\right)$$



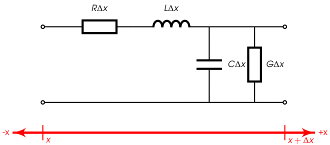
Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Équations de couplage en régime temporel

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\left(C\frac{\partial u}{\partial t} + Gu\right)$$

Équations de propagation



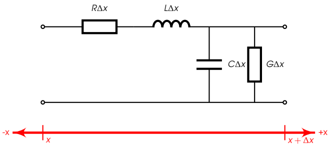
Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Équations de couplage en régime harmonique

On admet :

$$u(x,t) = \underline{U}(x)e^{j\omega t}$$
$$i(x,t) = \underline{I}(x)e^{j\omega t}$$

Équations de propagation



Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

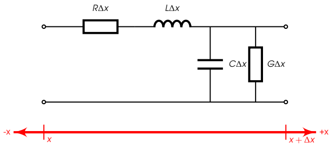
Équations de couplage en régime harmonique

On admet :

$$u(x,t) = \underline{U}(x)e^{j\omega t}$$
$$i(x,t) = \underline{I}(x)e^{j\omega t}$$

Les équations de couplage deviennent :

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = -\left(R + j\omega L\right)\underline{I}$$
$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -\left(G + j\omega C\right)\underline{U}$$



Modélisation du tronçon de ligne de longueur Δx.

Équations de propagation et relation de dispersion

Il en résulte :

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial x^2} + k^2 \underline{U} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial x^2} + k^2 \underline{I} = 0$$

avec k le nombre d'onde complexe et la relation de dispersion :

$$k^2 = -\left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right)$$

ou

$$k^2 = -\gamma^2$$

Impédance caractéristique

On pose :

- $Z = R + j\omega L$
- $Y = G + j\omega C$
- $\gamma^2 = ZY$ dont $\gamma = \sqrt{ZY}$
- $\gamma = jk$

Impédance caractéristique

On pose :

- $Z = R + j\omega L$
- $Y = G + j\omega C$
- $\gamma^2 = ZY$ dont $\gamma = \sqrt{ZY}$
- $\gamma = jk$

On admet la forme de l'amplitude de l'onde progressive :

$$\underline{I}(x) = I_i e^{-\gamma x}$$

Impédance caractéristique

On pose :

- $Z = R + j\omega L$
- $Y = G + j\omega C$
- $\gamma^2 = ZY$ dont $\gamma = \sqrt{ZY}$
- $\gamma = jk$

On admet la forme de l'amplitude de l'onde progressive :

$$\underline{I}(x) = I_i e^{-\gamma x}$$

En remplaçant $\underline{I}(x)$ et γ dans la deuxième équation de couplage, on peut démontrer que :

Impédance caractéristique

On pose :

- $Z = R + j\omega L$
- $Y = G + j\omega C$
- $\gamma^2 = ZY$ dont $\gamma = \sqrt{ZY}$
- $\gamma = jk$

On admet la forme de l'amplitude de l'onde progressive :

$$\underline{I}(x) = I_i e^{-\gamma x}$$

En remplaçant $\underline{I}(x)$ et γ dans la deuxième équation de couplage, on peut démontrer que :

$$\underline{U}(x) = \frac{\gamma}{Y}\underline{I}(x) = U_i e^{-\gamma x}$$

Impédance caractéristique

On pose :

- $Z = R + j\omega L$
- $Y = G + j\omega C$
- $\gamma^2 = ZY$ dont $\gamma = \sqrt{ZY}$
- $\gamma = jk$

On admet la forme de l'amplitude de l'onde progressive :

$$\underline{I}(x) = I_i e^{-\gamma x}$$

En remplaçant $\underline{I}(x)$ et γ dans la deuxième équation de couplage, on peut démontrer que :

$$\underline{U}(x) = \frac{\gamma}{Y}\underline{I}(x) = U_i e^{-\gamma x}$$

L'impédance le long de la ligne est alors :

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = \frac{\gamma}{Y} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Impédance caractéristique

On pose :

- $Z = R + j\omega L$
- $Y = G + j\omega C$
- $\gamma^2 = ZY$ dont $\gamma = \sqrt{ZY}$
- $\gamma = jk$

On admet la forme de l'amplitude de l'onde progressive :

$$\underline{I}(x) = I_i e^{-\gamma x}$$

En remplaçant $\underline{I}(x)$ et γ dans la deuxième équation de couplage, on peut démontrer que :

$$\underline{U}(x) = \frac{\gamma}{Y}\underline{I}(x) = U_i e^{-\gamma x}$$

L'impédance le long de la ligne est alors :

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = \frac{\gamma}{Y} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

À ω fixe, cette quantité est constante quelque soit la position en x. Ainsi, on définit l'impédance caractéristique Z_C :

$$Z_C = \frac{U_i}{I_i} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Impédance caractéristique

On pose :

- $Z = R + j\omega L$
- $Y = G + j\omega C$
- $\gamma^2 = ZY$ dont $\gamma = \sqrt{ZY}$
- $\gamma = jk$

On admet la forme de l'amplitude de l'onde progressive :

$$\underline{I}(x) = I_i e^{-\gamma x}$$

En remplaçant $\underline{I}(x)$ et γ dans la deuxième équation de couplage, on peut démontrer que :

$$\underline{U}(x) = \frac{\gamma}{Y}\underline{I}(x) = U_i e^{-\gamma x}$$

L'impédance le long de la ligne est alors :

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = \frac{\gamma}{Y} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

À ω fixe, cette quantité est constante quelque soit la position en x. Ainsi, on définit l'impédance caractéristique Z_C :

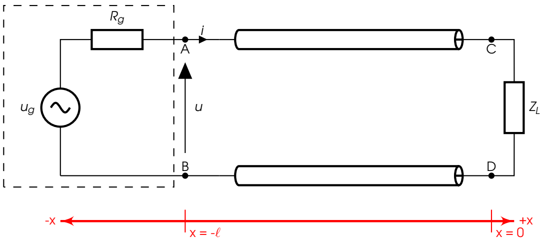
$$Z_C = \frac{U_i}{I_i} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Remarques

- Dans le cas sans pertes ($R = G = 0$), $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$
- Dans le cas sans distorsion (condition de Heaviside, $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$), $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Étude de la réflexion à l’extrémité d’une ligne

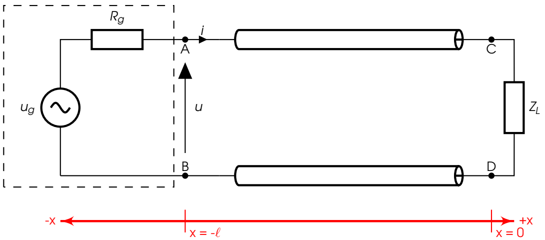
Prise en compte des conditions aux limites (1/2)



Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

Du fait de l'interface (ligne fermée en butée), on admet que l'onde courant dans la ligne correspond à la superposition de l'onde incidente et l'onde réfléchie.

Prise en compte des conditions aux limites (1/2)



Modèle de la ligne de transmission de longueur ℓ alimentée par un générateur de tension HF et fermée sur une impédance Z_L.

Du fait de l'interface (ligne fermée en butée), on admet que l'onde courant dans la ligne correspond à la superposition de l'onde incidente et l'onde réfléchie.

Ainsi l'amplitude complexe est donnée par :

$$\underline{I}(x) = i_I + i_R = I_i e^{-jkx} + I_r e^{jkx}$$

Prise en compte des conditions aux limites (2/2)

Rappel : Équations de couplage en régime harmonique

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = -Z\underline{I}$$

$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -Y\underline{U}$$

Prise en compte des conditions aux limites (2/2)

Rappel : Équations de couplage en régime harmonique

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = -Z\underline{I}$$
$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -Y\underline{U}$$

On remplace $\underline{I}(x)$ dans la deuxième équation de couplage et on en déduit $\underline{U}(x)$:

Prise en compte des conditions aux limites (2/2)

Rappel : Équations de couplage en régime harmonique

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = -Z\underline{I}$$
$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -Y\underline{U}$$

On remplace $\underline{I}(x)$ dans la deuxième équation de couplage et on en déduit $\underline{U}(x)$:

$$\underline{U}(x) = Z_c \left(I_i e^{-jkx} - I_r e^{jkx} \right)$$

Prise en compte des conditions aux limites (2/2)

Rappel : Équations de couplage en régime harmonique

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = -Z\underline{I}$$
$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -Y\underline{U}$$

On remplace $\underline{I}(x)$ dans la deuxième équation de couplage et on en déduit $\underline{U}(x)$:

$$\underline{U}(x) = Z_c \left(I_i e^{-jkx} - I_r e^{jkx} \right)$$

On définit :

$$Z(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = Z_c \frac{I_i e^{-jkx} - I_r e^{jkx}}{I_i e^{-jkx} + I_r e^{jkx}}$$

Coefficient de réflexion en amplitude (1/2)

Rappel

$$\underline{I}(x) = i_I + i_R = I_i e^{-jkx} + I_r e^{jkx}$$

Coefficient de réflexion en amplitude (1/2)

Rappel

$$\underline{I}(x) = i_I + i_R = I_i e^{-jkx} + I_r e^{jkx}$$

On définit le coefficient de réflexion en amplitude pour le courant : $\overline{r_i} = \frac{i_R}{i_I}$

Rappel

$$\underline{I}(x) = i_I + i_R = I_i e^{-jkx} + I_r e^{jkx}$$

On définit le coefficient de réflexion en amplitude pour le courant : $\overline{r_i} = \frac{i_R}{i_I}$

Dans ce référentiel, à l'interface entre la ligne de transmission et la impédance de charge (à x = 0) :

$$\overline{r_i} = \frac{I_r}{I_i}$$

et

$$Z(x=0) = Z_C \frac{I_i - I_r}{I_i + I_r} = Z_L$$

Coefficient de réflexion en amplitude (1/2)

Rappel

$$\underline{I}(x) = i_I + i_R = I_i e^{-jkx} + I_r e^{jkx}$$

On définit le coefficient de réflexion en amplitude pour le courant : $\overline{r_i} = \frac{i_R}{i_I}$

Dans ce référentiel, à l'interface entre la ligne de transmission et la impédance de charge (à x = 0) :

$$\overline{r_i} = \frac{I_r}{I_i}$$

et

$$Z(x=0) = Z_C \frac{I_i - I_r}{I_i + I_r} = Z_L$$

On en déduit :

$$\overline{r_i} = \frac{Z_C - Z_L}{Z_C + Z_L}$$

Coefficient de réflexion en amplitude (1/2)

Rappel

$$\underline{I}(x) = i_I + i_R = I_i e^{-jkx} + I_r e^{jkx}$$

On définit le coefficient de réflexion en amplitude pour le courant : $\overline{r_i} = \frac{i_R}{i_I}$

Dans ce référentiel, à l'interface entre la ligne de transmission et la impédance de charge (à x = 0) :

$$\overline{r_i} = \frac{I_r}{I_i}$$

et

$$Z(x=0) = Z_C \frac{I_i - I_r}{I_i + I_r} = Z_L$$

On en déduit :

$$\overline{r_i} = \frac{Z_C - Z_L}{Z_C + Z_L}$$

On peut aussi démontrer que : $\overline{r_U} = -\overline{r_i} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$

Coefficient de réflexion en amplitude (2/2)

Cas particuliers

- $Z_L = Z_C \rightarrow \overline{r_i} = \overline{r_u} = 0$ (on parle alors d'adaptation d'impédances)

Cas particuliers

- $Z_L = Z_C \rightarrow \overline{r_i} = \overline{r_u} = 0$ (on parle alors d'adaptation d'impédances)
- $Z_L = 0 \rightarrow \overline{r_i} = 1$ et $\overline{r_u} = -1$

Coefficient de réflexion en amplitude (2/2)

Cas particuliers

- $Z_L = Z_C \rightarrow \overline{r_i} = \overline{r_u} = 0$ (on parle alors d'adaptation d'impédances)
- $Z_L = 0 \rightarrow \overline{r_i} = 1$ et $\overline{r_u} = -1$
- $Z_L = \infty \rightarrow \overline{r_i} = -1$ et $\overline{r_u} = 1$

Conséquences (1/2)

Forme de la tension complexe

$$\underline{U}(x) = Z_C \left(I_i e^{-jkx} - I_r e^{jkx} \right)$$

Conséquences (1/2)

Forme de la tension complexe

$$\underline{U}(x) = Z_C I_i \left(e^{-jkx} - \frac{I_r}{I_i} e^{jkx} \right)$$

Conséquences (1/2)

Forme de la tension complexe

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} - \overline{r}_i e^{jkx} \right)$$

Conséquences (1/2)

Forme de la tension complexe

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{jkx} \right)$$

Conséquences (1/2)

Forme de la tension complexe

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{jkx} \right)$$

Changement de référentiel (Origine au générateur)

On pose x' = x + ℓ. Alors :

Conséquences (1/2)

Forme de la tension complexe

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{jkx} \right)$$

Changement de référentiel (Origine au générateur)

On pose x' = x + ℓ. Alors :

$$\underline{U}(x') = U_i \left(e^{-jk(x'-\ell)} + \overline{r_u} e^{jk(x'-\ell)} \right)$$

Conséquences (1/2)

Forme de la tension complexe

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{jkx} \right)$$

Changement de référentiel (Origine au générateur)

On pose x' = x + ℓ. Alors :

$$\underline{U}(x') = U_i \left(e^{-jkx'} e^{jk\ell} + \overline{r_u} e^{jkx'} e^{-jk\ell} \right)$$

Conséquences (1/2)

Forme de la tension complexe

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{jkx} \right)$$

Changement de référentiel (Origine au générateur)

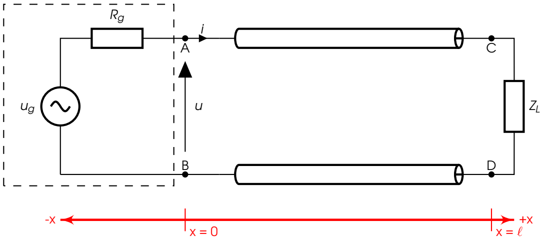
On pose x' = x + ℓ. Alors :

$$\underline{U}(x') = U_i \left(e^{-jkx'} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx'} \right)$$

Conséquences (2/2)

Attention

À partir d'ici la variable $x' = x$ pour alléger la notation.



$$\underline{U}(x) = Z_C I_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\underline{I}(x) = I_i \left(e^{-jkx} - \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$Z(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = Z_C \frac{e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx}}{e^{-jkx} - \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx}}$$

Impédance ramenée

Le générateur voit une impédance d'entrée Z_{in} :

$$Z_{in} = Z(x=0) = Z_c \frac{1 + \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}{1 - \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}$$

Impédance ramenée

Le générateur voit une impédance d'entrée Z_{in} :

$$Z_{in} = Z(x=0) = Z_c \frac{1 + \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}{1 - \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{(Z_L + Z_c) e^{jk\ell} + (Z_L - Z_c) e^{-jk\ell}}{(Z_L + Z_c) e^{jk\ell} + (Z_L - Z_c) e^{-jk\ell}}$$

Impédance ramenée

Le générateur voit une impédance d'entrée Z_{in} :

$$Z_{in} = Z(x=0) = Z_c \frac{1 + \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}{1 - \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{(Z_L + Z_C) e^{jk\ell} + (Z_L - Z_C) e^{-jk\ell}}{(Z_L + Z_C) e^{jk\ell} + (Z_L - Z_C) e^{-jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L cos(k\ell) + jZ_C sin(k\ell)}{Z_C cos(k\ell) + jZ_L sin(k\ell)}$$

Impédance ramenée

Le générateur voit une impédance d'entrée Z_{in} :

$$Z_{in} = Z(x=0) = Z_c \frac{1 + \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}{1 - \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{(Z_L + Z_c)e^{jk\ell} + (Z_L - Z_c)e^{-jk\ell}}{(Z_L + Z_c)e^{jk\ell} + (Z_L - Z_c)e^{-jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L cos(k\ell) + jZ_c sin(k\ell)}{Z_c cos(k\ell) + jZ_L sin(k\ell)}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c tan(k\ell)}{Z_c + jZ_L tan(k\ell)}$$

Impédance ramenée

Le générateur voit une impédance d'entrée Z_{in} :

$$Z_{in} = Z(x=0) = Z_c \frac{1 + \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}{1 - \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{(Z_L + Z_c)e^{jk\ell} + (Z_L - Z_c)e^{-jk\ell}}{(Z_L + Z_c)e^{jk\ell} + (Z_L - Z_c)e^{-jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L cos(k\ell) + jZ_c sin(k\ell)}{Z_c cos(k\ell) + jZ_L sin(k\ell)}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c tan(k\ell)}{Z_c + jZ_L tan(k\ell)}$$

Remarque

Pour une ligne sans pertes ($k = k' = \frac{2\pi}{\lambda}$),

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c tan(k'\ell)}{Z_c + jZ_L tan(k'\ell)}$$

Impédance ramenée

Le générateur voit une impédance d'entrée Z_{in} :

$$Z_{in} = Z(x=0) = Z_c \frac{1 + \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}{1 - \overline{r_u} e^{-2jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{(Z_L + Z_c)e^{jk\ell} + (Z_L - Z_c)e^{-jk\ell}}{(Z_L + Z_c)e^{jk\ell} + (Z_L - Z_c)e^{-jk\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L cos(k\ell) + jZ_c sin(k\ell)}{Z_c cos(k\ell) + jZ_L sin(k\ell)}$$

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c tan(k\ell)}{Z_c + jZ_L tan(k\ell)}$$

Remarque

Pour une ligne sans pertes ($k = k' = \frac{2\pi}{\lambda}$),

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c tan(k'\ell)}{Z_c + jZ_L tan(k'\ell)}$$

Cas particuliers :

- $\ell = \frac{\lambda}{2}$, $Z_{in} = Z_L$
- $\ell = \frac{\lambda}{4}$, $Z_{in} = \frac{Z_c^2}{Z_L}$ (on parle du transformateur quart d'onde)

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Ondes stationnaires

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_U} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_U} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s'intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_U} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow$

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s'intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$

Ondes stationnaires

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s´intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right)$

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx}\right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s'intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx}\right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)}\right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

Ondes stationnaires

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s´intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow$

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i\left(e^{-jkx} + \overline{r_u}e^{-2jk\ell}e^{jkx}\right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s´intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i\left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell}e^{jkx}\right) = U_i e^{-jk\ell}\left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)}\right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell))e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i\left(e^{-jkx} - e^{-2jk\ell}e^{jkx}\right)$

Ondes stationnaires

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s´intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} - e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} - e^{jk(x-\ell)} \right)$

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i\left(e^{-jkx} + \overline{r_u}e^{-2jk\ell}e^{jkx}\right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s´intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i\left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell}e^{jkx}\right) = U_i e^{-jk\ell}\left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)}\right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell))e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i\left(e^{-jkx} - e^{-2jk\ell}e^{jkx}\right) = U_i e^{-jk\ell}\left(e^{-jk(x-\ell)} - e^{jk(x-\ell)}\right)$

$$u(x,t) = 2jU_i sin(k(x-\ell))e^{j(\omega t - k\ell)}$$

Ondes stationnaires

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s'intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} - e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} - e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2jU_i sin(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

Remarques

Cette forme de solution possède des propriétés remarquables :

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s'intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} - e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} - e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2jU_i sin(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

Remarques

Cette forme de solution possède des propriétés remarquables :

- $Re\{u(x,t)\}$ est le produit d'une fonction de l'espace et par un fonction du temps (et non plus une fonction de l'espace et du temps).

Ondes stationnaires

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s'intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} - e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} - e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2jU_i sin(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

Remarques

Cette forme de solution possède des propriétés remarquables :

- $Re\{u(x,t)\}$ est le produit d'une fonction de l'espace et par un fonction du temps (et non plus une fonction de l'espace et du temps).
- L'amplitude n'est pas constante le long de la ligne mais dépend de x.

Ondes stationnaires

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s'intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} - e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} - e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2jU_i sin(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

Remarques

Cette forme de solution possède des propriétés remarquables :

- $Re\left\{u(x,t)\right\}$ est le produit d'une fonction de l'espace et par un fonction du temps (et non plus une fonction de l'espace et du temps).
- L'amplitude n'est pas constante le long de la ligne mais dépend de x.
- Tous les points oscillent en phase ou en opposition de phase. On ne voit plus apparaître de terme du type $\omega t - kx$, donc on ne « voit » plus de propagation et on parle alors d'*Ondes Stationnaires*.

Ondes stationnaires

Rappel

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + \overline{r_u} e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right)$$

$$\overline{r_u} = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Lorsque on s'intéresse aux cas extrêmes de Z_L :

- $\overline{r_u} = 1$ (Circuit Ouvert) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2U_i cos(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

- $\overline{r_u} = -1$ (Court Circuit) $\rightarrow \underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} - e^{-2jk\ell} e^{jkx} \right) = U_i e^{-jk\ell} \left(e^{-jk(x-\ell)} - e^{jk(x-\ell)} \right)$

$$u(x,t) = 2jU_i sin(k(x-\ell)) e^{j(\omega t - k\ell)}$$

Remarques

Cette forme de solution possède des propriétés remarquables :

- $Re\{u(x,t)\}$ est le produit d'une fonction de l'espace et par un fonction du temps (et non plus une fonction de l'espace et du temps).
- L'amplitude n'est pas constante le long de la ligne mais dépend de x.
- Tous les points oscillent en phase ou en opposition de phase. On ne voit plus apparaître de terme du type $\omega t - kx$, donc on ne « voit » plus de propagation et on parle alors d'*Ondes Stationnaires*.

Une ligne en onde stationnaire est un résonateur. La longueur de la ligne permet alors de choisir le type de résonance pour une application voulue (filtrage, antenne, CEM).

Attention

$$\overline{r_u} =$$

Ondes pseudo stationnaires

Attention

$$\overline{r_U} = \Gamma_L$$

Attention

$$\overline{r_u} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

Attention

$$\overline{r_u} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = |\Gamma_L|\, e^{j\theta_L}$$

Ondes pseudo stationnaires

Attention

$$\overline{r_u} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = |\Gamma_L|\, e^{j\theta_L}$$

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + |\Gamma_L|\, e^{(j\theta_L - 2jk\ell)} e^{jkx} \right)$$

Attention

$$\overline{r_u} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = |\Gamma_L| \, e^{j\theta_L}$$

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + |\Gamma_L| \, e^{(j\theta_L - 2jk\ell)} e^{jkx} \right)$$

Lorsque la ligne n'est pas adaptée ($\Gamma_L \neq 0$), l'amplitude de la tension est :

Ondes pseudo stationnaires

Attention

$$\overline{r_u} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = |\Gamma_L|\, e^{j\theta_L}$$

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + |\Gamma_L|\, e^{(j\theta_L - 2jk\ell)} e^{jkx} \right)$$

Lorsque la ligne n'est pas adaptée ($\Gamma_L \neq 0$), l'amplitude de la tension est :

- Maximum, $U_M = |U_i|\,(1 + |\Gamma_L|)$

Attention

$$\overline{r_u} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = |\Gamma_L|\, e^{j\theta_L}$$

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + |\Gamma_L|\, e^{(j\theta_L - 2jk\ell)} e^{jkx} \right)$$

Lorsque la ligne n'est pas adaptée ($\Gamma_L \neq 0$), l'amplitude de la tension est :

- Maximum, $U_M = |U_i|\,(1 + |\Gamma_L|)$
- Minimum, $U_m = |U_i|\,(1 - |\Gamma_L|)$

Ondes pseudo stationnaires

Attention

$$\overline{r_u} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = |\Gamma_L|\, e^{j\theta_L}$$

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + |\Gamma_L|\, e^{(j\theta_L - 2jk\ell)} e^{jkx} \right)$$

Lorsque la ligne n'est pas adaptée ($\Gamma_L \neq 0$), l'amplitude de la tension est :

- Maximum, $U_M = |U_i|\,(1 + |\Gamma_L|)$
- Minimum, $U_m = |U_i|\,(1 - |\Gamma_L|)$

On définit ainsi le *Rapport d'Ondes Stationnaires* (Standing Wave Ratio, **SWR**) :

$$SWR = \rho = \frac{U_M}{U_m} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

Ondes pseudo stationnaires

Attention

$$\overline{r_u} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = |\Gamma_L|\, e^{j\theta_L}$$

$$\underline{U}(x) = U_i \left(e^{-jkx} + |\Gamma_L|\, e^{(j\theta_L - 2jk\ell)}\, e^{jkx} \right)$$

Lorsque la ligne n'est pas adaptée ($\Gamma_L \neq 0$), l'amplitude de la tension est :

- Maximum, $U_M = |U_i|\,(1 + |\Gamma_L|)$
- Minimum, $U_m = |U_i|\,(1 - |\Gamma_L|)$

On définit ainsi le *Rapport d'Ondes Stationnaires* (Standing Wave Ratio, **SWR**) :

$$SWR = \rho = \frac{U_M}{U_m} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

Cas particuliers

- $|\Gamma_L| = 0$, $\rho = 1$: Onde progressive
- $0 < |\Gamma_L| < 1$, $\rho \to \infty$: Onde pseudo stationnaire
- $|\Gamma_L| = 1$, $\rho = \infty$: Onde stationnaire